数理解析研究所講究録 1223 巻 2001 年 61-68

高次元のクライン群の極限集合のハウスドルフ次元 —収束指数と凸ココンパクト性—

井関 裕靖 (Hiroyasu Izeki)

東北大学大学院理学研究科 (Mathematical Institute, Tohoku University)

1 序

n 次元の標準的球面, 実双曲空間をそれぞれ $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{H}^n$ で表す. また $\mathbb{S}^n$ の共形変換群を $\mathrm{Conf}(\mathbb{S}^n)$, $\mathbb{H}^{n+1}$ の等長変換群を $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^{n+1})$ で表すことにする. よく知られているように, $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^{n+1})$ の元の作用は $\mathbb{H}^{n+1}$ の境界 $\mathbb{S}^n$ にまで拡張され, 共形変換として $\mathbb{S}^n$ に作用する. この拡張による対応が, 同型 $\mathrm{Conf}(\mathbb{S}^n) \cong \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^{n+1})$ を与える. 以下では, $\mathrm{Conf}(\mathbb{S}^n) \cong \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^{n+1})$ の離散部分群を Klein 群と呼ぶことにする. Klein 群 Γ に対し, $x \in \mathbb{H}^{n+1}$ の軌道 Γx の $\mathbb{H}^{n+1} \cup \mathbb{S}^n$ における集積点を極限集合 (limit set) と呼び $\Lambda(\Gamma)$ で表わす. Γ の不連続領域 $\mathbb{S}^n \setminus \Lambda(\Gamma)$ を $\Omega(\Gamma)$ で表わす. Γ は $\Omega(\Gamma)$ に固有不連続に作用する. $C(\Gamma)$ で, $\Lambda(\Gamma)$ の双曲的凸包 (hyperbolic convex hull), すなわち, $\Lambda(\Gamma)$ を $\mathbb{S}^n \cup \mathbb{H}^{n+1}$ における閉包に含むような最小の双曲的凸集合を表わすことにする. Γ の有限部分群の位数が有界で, かつある $\varepsilon > 0$ に対して $C(\Gamma)/\Gamma$ の ε-近傍の体積が有限であるとき, Γ は幾何学的有限といわれる. さらに, $C(\Gamma)/\Gamma$ がコンパクトになるとき, Γ は凸ココンパクトと呼ばれる. Γ が凸ココンパクトなら, Γ はもちろん幾何学的有限である. Γ が凸ココンパクトであることと, $(\mathbb{H}^{n+1} \cup \Omega(\Gamma))/\Gamma$ がコンパクトになることとは同値であることが知られている ([12]).

また, Γ の収束指数 (critical exponent) を $\delta(\Gamma) = \inf\{s > 0 \mid \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-sd(\gamma x, y)} < \infty\}$ で定義する. ここで $x, y \in \mathbb{H}^{n+1}$, $d(\cdot,\cdot)$ は $\mathbb{H}^{n+1}$ の双曲距離である. この量は, Γ の軌道の広がり具合を表しているので, Γ の作用の大きさを計っていると思ってよい. 他に, Γ の作用の大きさを表わす量として, Γ の極限集合 $\Lambda(\Gamma)$ の Hausdorff 次元 $\dim_H \Lambda(\Gamma)$ があるが, 一般には両者は一致せず,

$$\delta(\Gamma) \leq \dim_H \Lambda(\Gamma)$$

なる不等式が成立することが知られている ([1, Theorem 1.1]). ただし, Γ が幾何学的有限な Klein 群ならば, 上の不等式において等号が成立する.

本稿の主定理は, Γ の作用がある意味で小さければ, Γ が幾何学的有限または凸ココンパクトになることを主張する次の結果である:

定理 1.1 ([5, Theorem 1]) $\Gamma \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^{n+1})$ $(n \geq 3)$ を $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ がコンパクトな連結成分をもつような *Klein* 群とする.

(1) $\delta(\Gamma) < n-1$ ならば, $\Omega(\Gamma)$ は連結で Γ は幾何学的有限である.

(2) $\delta(\Gamma) < n/2$ ならば, $\Omega(\Gamma)$ は連結で Γ は凸ココンパクトである.

$n=2$ の場合は, Bishop-Jones [1] により, Γ が解析的有限で, 極限集合の Hausdorff 次元が 2 より小さいならば, Γ は幾何学的有限であることが示されている. しかしながら, 高次元では, 解析的有限性にあたる概念が (筆者の知る限りでは) ない. また, 定理 1.1 の Γ に関する仮定を有限生成に置き換えてしまうと, (1), (2) は成立しない. 実際, $\mathbb{S}^2 \cup \mathbb{H}^3$ に作用する有限生成なクライン群で, 幾何学的有限でないもの (例えば全退化群) をとり, 全測地的埋め込み $\mathbb{H}^3 \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ $(n \geq 4)$ を通して $\mathbb{H}^{n+1}$ に作用する Klein 群とみなすと, これが反例になる. 定理 1.1 の証明には, Bishop-Jones の手法と, [3] の議論を用いる.

筆者にとって, 上の結果を示す動機となったのは, 平坦な共形構造 (flat conformal structure) の変形空間に関する考察だった. 以下で, これを説明しておきたい.

n 次元多様体 M に共形構造 C が与えられているとする. ここで, 共形構造とは, M 上の Riemann 計量の共形類のことで, 一つ代表元 $g \in C$ を固定することで

$$C = \{fg \mid f \text{ は } M \text{ 上の正値 } C^\infty \text{級関数}\}$$

と表わすことができる. 一言で言えば, C は, M の接空間の二つのベクトルに対して g と同じ角度を与える (ベクトルの大きさは同じとは限らない) 計量の集合である. (M,C) が共形平坦であるとは, (M,C) が局所的には $\mathbb{S}^n$ と共形的に同値であることをいう. このとき, C を平坦な共形構造と呼ぶ. M に平坦な共形構造を与えることは, M に $(\mathrm{Conf}(\mathbb{S}^n), \mathbb{S}^n)$-構造を与えることとは同値である. したがって, (M,C) が共形平坦であるとき, M の普遍被覆から $\mathbb{S}^n$ への展開写像 (developing map) が定義されること, 展開写像により基本群 $\pi_1(M)$ の $\mathrm{Conf}(\mathbb{S}^n)$ への準同型 (ホロノミー表現) が誘導されること, 等は (曲面の射影構造のときと同様に) (G,X)-構造の一般論からしたがう.

Klein 群 Γ の $\Omega(\Gamma)$ への作用が自由なとき, $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ は多様体で, 共形平坦な多様体の典型的な例になる. 実際, $\Omega(\Gamma)$ には, $\mathbb{S}^n$ の共形構造を制限することにより, 自然に共形構造が定義されるが, これは明らかに平坦な共形構造である. Γ は $\mathbb{S}^n$ の共形変換群の部分群なので, この $\Omega(\Gamma)$ 上の共形構造を保存する. したがって, $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ に平坦な共形構造が落ちる.

以下では, Riemann 計量 g を含む共形構造が平坦であるとき, Riemann 多様体 (M,g) は共形平坦である, ということにする. (M,g) を $\dim M \geq 4$ なる連結, コンパクトな共形平坦多様体とする. Schoen-Yau の結果 [11, Proposition 3.3] により, (M,g) のスカラー曲率が正なら, (M,g) の普遍被覆空間 $(\tilde{M},\tilde{g})$ から標準的球面 $\mathbb{S}^n$ への展開写像は単射になる. このとき, ホロノミー表現による基本群の像を Γ とすれば, Γ は Klein 群で, 展開

写像の像は Γ の不連続領域の連結成分になることが容易に確められる．実は，この Γ は $\delta(\Gamma) \leq (n-2)/2$ を満たす．上の結果と合わせると，次がしたがう．

系 1.2 (M, g) *を連結，コンパクトで正スカラー曲率をもつ共形平坦多様体，* $\dim M \geq 4$ *とする．このとき，ある凸ココンパクト Klein 群* Γ *が存在して* (M, g) *は* $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ *と共形同値になる．*

注意 1 Schoen-Yau は [11, Proposition 3.3] において，(M, g) が連結，コンパクトで非負スカラー曲率をもち $\dim M \geq 7$ なら，$\tilde{M}$ からの展開写像は単射で，ホロノミー表現の像 Γ は $\delta(\Gamma) \leq (n-2)/2$ を満たすことも示している．ただし，M は n 次元トーラス T^n を有限被覆にもたないとする．さらに，(M, g) が連結，コンパクトで非負スカラー曲率をもつなら，$\dim M \geq 3$ の仮定の下で同じ結論が成立すると主張しているが，その証明は未だ発表されてはいない．

上の系と高次元の凸ココンパクト Klein 群に対する擬等角安定性 ([4, Theorem 1]) から，次がしたがう．(実は，筆者が示したかったのはこの結果である．[4, Theorem2] も参照のこと．)

定理 1.3 ([5, Theorem 2]) (M, C) *を連結，コンパクトで共形平坦な多様体で，次の (1) または (2) を満たすものとする．*

(1) $\dim M \geq 4$ *で* C *は正スカラー曲率をもつ計量* g *を含む．*

(2) $\dim M \geq 7$ *で* C *は非負スカラー曲率をもつ計量* g *を含む．*

$\mathcal{M}_0$ *を，*M *上の平坦な共形構造のモデュライ空間の連結成分で，上の* C *を含むものとする．このとき，*$\mathcal{M}_0$ *の各点は，展開写像が単射でホロノミー表現の像が凸ココンパクト Klein 群であるような平坦共形構造の同値類である．*

すなわち，系 1.2 の結論は正スカラー曲率をもつ計量を含む C だけでなく，平坦な共形構造の変形空間の中で C と同じ連結成分に属する全ての共形構造に対して成立することになる．

また，系 1.2 は M の位相についても幾つかの情報を与えてくれる．直ちにわかることは次である．

定理 1.4 ([5, Theorem 3]) (M, C) *は定理 1.3 の仮定を満たす共形平坦多様体だとする．このとき，*M *の基本群は双曲群である．*

さらに，M の任意の局所系に係数をもつホモロジー・コホモロジーは基本群のホモロジー・コホモロジーによって完全に決定されること等もわかる．

定理 1.3, 定理 1.4 を示すには，定理 1.1(2) を $\delta(\Gamma) \leq (n-2)/2$ の場合にだけ示せばよい．この場合には，$\Omega(\Gamma)/\Gamma$ の高次種数に対する指数定理を使う微分幾何的な証明が与えられる．古典的な Atiyah-Singer 指数定理が，共形平坦多様体に対してほとんど何も言わないことを考えると (§3 注意 2 を参照)，このことは (少なくとも筆者にとっては) 非常に

興味深く思われる．本稿の第3節で，この指数定理による証明を紹介する．第4節では定理1.1の証明の概略を述べる．第2節には，第3節のための準備として，$\Omega(\Gamma)/\Gamma$ の微分幾何と $\delta(\Gamma)$ の関係を簡単にまとめておく．

2 Γの収束指数と$\Omega(\Gamma)/\Gamma$のスカラー曲率

第3節で述べる証明では，$\Omega(\Gamma)/\Gamma$ における微分幾何的な議論を用いる．その際に，Γ の収束指数 $\delta(\Gamma)$ を $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ の微分幾何的な量に置き換えて理解する必要があるわけだが，実は $\delta(\Gamma)$ は $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ の曲率と密接に関係している．最初にこのことが指摘されたたのは，次の Schoen-Yau の結果においてである．

定理 2.1 ([11, Proposition 3.3]) (M,C) を連結，コンパクトな共形平坦多様体で，次の (1) または (2) を満たすものとする．

(1) $\dim M \geq 4$ で C は正スカラー曲率をもつ計量 g を含む．

(2) $\dim M \geq 7$ で C は非負スカラー曲率をもつ計量 g を含む．

このとき，(M,C) の展開写像は単射である．特に，ホロノミー表現による $\pi_1(M)$ の像を Γ とすると，(M,C) は $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ と共形同値になる．さらに，M が n 次元トーラス T^n を有限被覆に持たないならば，Γ は $\delta(\Gamma) \leq (n-2)/2$ を満たす．

M が T^n を有限被覆にもつときは，その展開写像は単射で，Γ は階数 n の放物的 Klein 群となる，すなわち $\mathbb{Z}^n$ を有限指数の部分群にもつ．このとき $\delta(\Gamma) = n/2$ となることを注意しておく．

一方，納谷は [9] において，Γ の Patterson-Sullivan 測度を用いて，$\Omega(\Gamma)$ に Γ-不変な Riemann 計量を構成した．その構成法を簡単に説明しておく．$\mathbb{H}^{n+1}$ を $\mathbb{R}^{n+1}$ の単位球体，$\mathbb{S}^n$ を $\mathbb{R}^{n+1}$ の単位球面とみなし，o で原点を表わすことにする．また，$x, y \in \mathbb{S}^n$ に対し，$|x-y|$ で $\mathbb{R}^{n+1}$ における Euclid 距離を表わす．μ を Γ の o を基点とする Patterson-Sullivan 測度，g_0 を $\mathbb{S}^n$ の標準的 Riemann 計量，すなわち $\mathbb{R}^{n+1}$ からの誘導計量とする．このとき g_0 に関数をかけて得られる $\Omega(\Gamma)$ 上の Riemann 計量

$$g(x) = \left(\int_{\Lambda(\Gamma)} \left(\frac{2}{|x-y|^2}\right)^{\delta(\Gamma)} d\mu(y)\right)^{2/\delta(\Gamma)} g_0(x), \quad x \in \Omega(\Gamma),\ y \in \Lambda(\Gamma)$$

は Γ の作用で不変になり，$\Omega(\Gamma)/\Gamma$ に Riemann 計量を定める．構成の仕方から，この計量は $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ に自然に定まる共形構造 (共形類) に属している．本稿ではこの計量を納谷計量と呼ぶことにし，g_N で表わす．この計量は様々な良い性質をもつが，その一つに，g_N の種々の曲率の符号が $\delta(\Gamma)$ の値によって決まる，という性質がある．我々に必要となるのは次のスカラー曲率に関する結果である．

定理 2.2 ([9, Theorem 3.3]) $\Gamma \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^{n+1})$, $(n \geq 3)$ を，捩れのない，$\Omega(\Gamma)/\Gamma$ がコンパクトな *Klein* 群とする．さらに，$\Omega(\Gamma)/\Gamma$ は T^n を有限被覆にもたないとする．（すな

わち, $\mathbb{Z}^n$ を有限指数の部分群にもたないとする.) このとき g_N のスカラー曲率が正 (零, 負) になるための必要十分条件は $\delta(\Gamma) < (n-2)/2$ ($\delta(\Gamma) = (n-2)/2$, $\delta(\Gamma) > (n-2)/2$) となることである.

定理 2.2 と簡単な微分幾何的考察から次が示される.

補題 2.3 ([5, Lemma 6]) $\Gamma \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^{n+1})$, $(n \geq 3)$ を捩れのない $\delta(\Gamma) \leq (n-2)/2$ なる *Klein* 群で, $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ はコンパクトだとする. このとき, $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ は正スカラー曲率をもつ (必ずしも共形平坦とは限らない)*Riemann* 計量を許容する.

3 指数定理を用いた凸ココンパクト性の証明

この節では, 定理 1.1 より強い仮定の下で, Γ の凸ココンパクト性を示す.

命題 3.1 ([5, Proposition 7]) $\Gamma \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^{n+1})$ $(n \geq 3)$ を $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ がコンパクトな連結成分をもつような *Klein* 群とする. $\delta(\Gamma) \leq (n-2)/2$ なら, $\Omega(\Gamma)$ は連結で, Γ は凸ココンパクトである.

(証明)　仮定から $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ はコンパクトな連結成分 M_0 をもつ. この M_0 を被覆する $\Omega(\Gamma)$ の連結成分を Ω_0, Ω_0 の固定化群 (stabilizer) を Γ_0 とする. $M_0 = \Omega_0/\Gamma_0$ はコンパクトなので, Γ_0 は有限生成である. したがって, 有限指数の部分群 $\Gamma_1 \subset \Gamma_0$ で捩れのないものがとれる. このとき, Ω_0/Γ_1 はコンパクトな多様体であり, $\delta(\Gamma_1) \leq \delta(\Gamma) \leq (n-2)/2 < n-1$ なので, 次の補題から, $\Omega_0 = \Omega(\Gamma)$, したがって $\Gamma_0 = \Gamma$ であることがわかる.

補題 3.2 ([3, Propsition 3.2]) Ω を $\mathbb{S}^n$ の連結開部分集合, Γ を Ω を固定し, かつ自由に作用する *Klein* 群とする. $\delta(\Gamma) < n-1$ で, Ω/Γ がコンパクトなら, $\dim_H \Lambda(\Gamma) \leq \delta(\Gamma) < n-1$ で, $\Omega = \Omega(\Gamma)$ である. 特に, $\Omega(\Gamma)$ は連結になる.

Γ の凸ココンパクト性は, その有限指数部分群の凸ココンパクト性と同値になることは定義から明らかである. したがって, 命題 3.1 を示すには, 上でとった Γ_1 の凸ココンパクト性を示せばよい. そこで, 以下では Γ は捩れをもたないとし, さらに $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^{n+1})$ の単位元の連結成分に含まれていると仮定する. この仮定の下で $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ はコンパクトで向き付け可能な多様体になる.

まず, $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ の高次 $\hat{A}$ 種数が消えていることを示す. 多様体 M の $\hat{A}$ 類 $\hat{A}(M)$ は

$$\hat{A}(M) = 1 - \frac{1}{24}p_1 + \frac{1}{5760}(7p_1^2 - 4p_2) + \cdots$$

で定義されるコホモロジー環 $H^*(M,\mathbb{Q})$ の元であった. ここで, 1 は $H^0(M,\mathbb{Z})$ の生成元, $p_j \in H^{4j}(M,\mathbb{Q})$ は j 次の Pontrjagin 類を表わす. M の基本群 $\pi_1(M)$ の分類空間

を $B(\pi_1(M))$ で表わし, $f : M \longrightarrow B(\pi_1(M))$ を分類写像としよう. このとき, $u \in H^*(B(\pi_1(M)), \mathbb{Z})$ に対する M の高次 $\hat{A}$ 類は

$$\hat{A}_u(M) = \hat{A}(M) \cup f^* u$$

で定義される. この高次 $\hat{A}$ 類を M の基本類 $[M]$ で値をとらせて得られる数

$$\langle \hat{A}_u(M), [M] \rangle$$

を u に対する高次 $\hat{A}$ 種数と呼ぶ. この高次 $\hat{A}$ 種数は M が正スカラー曲率をもつ Riemann 計量を許容するための障害になっていることが知られている:

定理 3.3 ([10, Theorem 3.5]) *M を連結, コンパクトな向き付けられた多様体で, 次の三つの条件を満たすものとする.*
(1) M の普遍被覆 $\tilde{M}$ はスピン構造をもつ.
(2) $\pi_1(M)$ に対して強 Novikov 予想が成立する.
(3) M は正スカラー曲率をもつ Riemann 計量を許容する.
このとき, 任意の $u \in H^*(B(\pi_1(M)), \mathbb{Q})$ に対して $\langle \hat{A}_u(M), [M] \rangle = 0$ が成立する.

この定理は高次 $\hat{A}$ 種数に関する指数定理の帰結である. 詳しくは [10] を参照されたい.

この定理から, 次のようにして, $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ の高次 $\hat{A}$ 種数が消えることがわかる. 上の補題 3.2 と Γ に対する仮定から, $\dim_H \Lambda(\Gamma) \leq (n-2)/2$ となるので, $\Omega(\Gamma)$ は単連結, すなわち $\Omega(\Gamma)$ は $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ の普遍被覆空間である. Γ は無限群だから $\Lambda(\Gamma) \neq \emptyset$ で, $\Omega(\Gamma) \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{S}^n \setminus \{1\text{ 点}\}$. したがって, $\Omega(\Gamma)$ の接束は自明束である. 接束が自明ならスピン構造が入るので, $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ は (1) を満たす. $\Gamma \cong \pi_1(\Omega(\Gamma)/\Gamma)$ で, Γ は $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^{n+1})$ の単位元の連結成分に含まれているとしているから, [7] (または [10, p. 202]) から (2) がしたがう. さらに, 補題 2.3 から (3) も成り立っている. よって $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ の高次 $\hat{A}$ 種数は全て消える.

次に高次 $\hat{A}$ 種数の消滅が Γ の凸ココンパクト性を導くことをみよう.

$\Gamma \cong \pi_1(\Omega(\Gamma)/\Gamma)$ なので, $\pi_1(\Omega(\Gamma)/\Gamma)$ の分類空間として $(\Omega(\Gamma) \cup \mathbb{H})/\Gamma$ をとることができる. このとき, 自然な包含写像 $i : \Omega(\Gamma)/\Gamma \hookrightarrow (\Omega(\Gamma) \cup \mathbb{H})/\Gamma$ が分類写像となる. $u \in H^n((\Omega(\Gamma) \cup \mathbb{H})/\Gamma, \mathbb{Q})$ をとると, $n = \dim \Omega(\Gamma)/\Gamma$ だから, $p_j \cup i^* u = 0$ $(j = 1, 2, \ldots)$ となる. よって

$$\hat{A}_u(\Omega(\Gamma)/\Gamma) = i^* u$$

である. $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ の高次 $\hat{A}$ 種数は全て消えていたから,

$$0 = \langle i^* u, [\Omega(\Gamma)/\Gamma] \rangle = \langle u, i_* [\Omega(\Gamma)/\Gamma] \rangle \tag{3.1}$$

のはずである. ここで, i_* は i の誘導するホモロジー群の間の準同型写像を表わす. (3.1) 式は, $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ の基本類 $[\Omega(\Gamma)/\Gamma]$ の $i_* : H_*(\Omega(\Gamma)/\Gamma, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_*((\Omega(\Gamma) \cup \mathbb{H})/\Gamma, \mathbb{Z})$ による像が $H_n((\Omega(\Gamma) \cup \mathbb{H})/\Gamma, \mathbb{Z})$ の捩れ元になっていることを意味する. ところが, $\mathbb{H}^{n+1}/\Gamma$ は非コンパクトなので, $0 = H_{n+1}(\mathbb{H}^{n+1}/\Gamma, G) \cong H_{n+1}((\Omega(\Gamma) \cup \mathbb{H})/\Gamma, G)$ が任意のアーベル

群 G に対して成立する．このことと普遍係数定理から $H_n((\Omega(\Gamma)\cup\mathbb{H})/\Gamma,\mathbb{Z})$ は捩れをもたない．よって $i_*[\Omega(\Gamma)/\Gamma]=0$ である．このとき $(\Omega(\Gamma)\cup\mathbb{H})/\Gamma$ には $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ を境界にもつような $(n+1)$-チェインが存在するはずだが，これは $(\Omega(\Gamma)\cup\mathbb{H})/\Gamma$ でなくてはならない．したがって $(\Omega(\Gamma)\cup\mathbb{H})/\Gamma$ はコンパクトである．(本質的に同じことであるが，このことは Meyer-Vietoris 完全系列を用いても証明できる．[3, Proposition 4.9] の証明を参照のこと．) $(\Omega(\Gamma)\cup\mathbb{H})/\Gamma$ のコンパクト性は Γ の凸ココンパクト性と同値だったから Γ は凸ココンパクトである． (証明終)

(注意 2) 実は，共形平坦多様体 M の Pontrjaigin 類 $p_j\in H^{4j}(M,\mathbb{Q})$ は全て消えることが知られている ([8] 参照)．一方，多様体の特性類のほとんどは p_j の多項式として表わされるので，共形平坦多様体のほとんどの特性類は自明である．そのため，古典的な Atiyah-Singer の指数定理から共形平坦多様体に関する非自明な情報を得ることはあまり期待できない．しかし，上で扱ったような，基本群の情報まで込めた高次種数は非自明な値をとりうる．定義を思い出してみれば，Pontrjagin 類が消えることは，共形平坦多様体の高次種数が基本群の情報のみをもっていることを意味している．このことから，例えば $\Omega(\Gamma)$ が単連結な場合は，Γ に関する情報を取り出すことが可能になる．そのため，上のような証明を与えることができたわけだが，応用の仕方，得られた結果 (命題 3.1) は安直といえば安直で不満の残るものである．筆者は他にも高次種数の指数定理の Klein 群論へのより良い応用があることを期待しているのだが．

4 定理 1.1 の証明の概略

この節では，定理 1.1 の証明の概略を述べる．前節ですでに現われた議論を用いれば，後は Bishop-Jones の証明を追うだけなので，ごく手短かに述べるにとどめる．

補題 3.2 から，定理 1.1 の仮定を満たす Γ の $\Omega(\Gamma)$ は連結で，$\dim_H \Lambda(\Gamma)<n-1$ となることがわかる．$\Omega(\Gamma)/\Gamma$ はコンパクトなので Γ は有限生成である．Γ の幾何学的有限性は，その有限指数部分群の幾何学的有限性と同値なので，Γ は捩れをもたない仮定してよい．もし，$\Lambda(\Gamma)$ の双曲的凸包 $C(\Gamma)$ が内点をもたないなら，[3, Lemma 2.2] と $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ のコンパクト性から Γ は凸ココンパクトである．以下では $C(\Gamma)$ が内点をもつ場合だけを考えればよい．$\Omega(\Gamma)$ から $C(\Gamma)$ への最近点写像を考えると，これは $C(\Gamma)$ の境界 $\partial C(\Gamma)$ への全射で，Γ の作用に関してもちろん同変である．したがって $\partial C(\Gamma)/\Gamma$ はコンパクトになっている．このとき，[1, Lemma 3.4] にあるようなリプシッツグラフがとれることは容易にわかる．さらに $\mathbb{H}^{n+1}$ における熱核の評価が $n=2$ の場合の [1, Theorem 4.1] と同様の形で成立することに注意すると (または，[2] を参照)，[1, pp. 25–27] の議論がそのまま適用できることが容易に確められる．したがって，Γ が幾何学的に有限でないなら $\dim_H \Lambda(\Gamma)=n$ でなくてはならない．ところが，上で示したように $\dim_H \Lambda(\Gamma)<n-1$ だからこれは矛盾．よって Γ は幾何学的有限である．さらに $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ がコンパクトなことに注意すると，Γ のもつ放物的カスプの階数は n でなくてはならない．このときは $\delta(\Gamma)\geq n/2$ となる．よって，(2) のように $\delta(\Gamma)<n/2$ を仮定すると，Γ は幾何学的有限でかつ放物的カスプをもち

得ない. すなわちΓは凸ココンパクトである. (証明終)

参考文献

[1] C. J. Bishop and P. W. Jones, *Hausdorff dimension and Kleinian groups*, Acta Math., 179 (1997), 1–39.

[2] E. B. Davies, *Gaussian upper bounds for the heat kernel of some second-order operators on Riemannian manifolds*, J. Funct. Anal., 80 (1988), 16–32.

[3] H. Izeki, *Limit sets of Kleinian groups and conformally flat Riemannian manifolds*, Invent. Math., 122 (1995), 603–625.

[4] ———, , *Quasiconformal stability of Kleinian groups and an embedding of a space of flat conformal structures*, Conform. Geom. Dyn., 4 (2000), 108–119.

[5] ———, , *Convex-cocompactness of Kleinian groups and conformally flat manifolds with positive scalar curvature*, preprint

[6] H. Izeki and S. Nayatani, *Canonical metric on the domain of discontinuity of a Kleinian groups*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie, Grenoble, 16 (1998), 9–32.

[7] G. G. Kasparov, *K-theory, group C^*-algebras, and higher signatures (Conspectus)*, in Novikov Conjectures, Index Theorems and Rigidity, eds., S. C. Ferry et al., LMS 226, Cambridge University Press, 1995, 101–146.

[8] J. Lafontaine, *Conformal geometry from the Riemannian viewpoint*, in Conformal Geometry, eds., R. S. Kulkarni and U. Pinkall, Aspects of Math. E12, Vieweg, Braunschweig, 1988, 65–91.

[9] S. Nayatani, *Patterson-Sullivan measure and conformally flat metrics*, Math. Z., 225 (1997), 115–131.

[10] J. Rosenberg, *Group C^*-algebras, positive scalar curvature, and the Novikov conjecture*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., 58 (1983), 197-212.

[11] R. Schoen and S. T. Yau, *Conformally flat manifolds, Kleinian groups and scalar curvature*, Invent. Math., 92 (1988), 47–71.

[12] P. Tukia, *On isomorphisms of geometrically finite Möbius groups*, Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci., 61 (1985), 171–214.